УДК 519.6

НЕЛИНЕЙНЫЙ СОГЛАСОВАННЫЙ МЕТОД (НС-МЕТОД) УСКОРЕНИЯ СХОДИМОСТИ ИТЕРАЦИЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА

Р. М. Шагалиев, А. А. Бусалов
(ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области)

Работа посвящена конструированию нового метода ускорения сходимости — нелинейного согласованного НС-метода в пространственно одномерной постановке. Вывод НС-метода дан применительно к сеточной аппроксимации уравнения переноса по разностной схеме, обеспечивающей положительность сеточного решения на структурированных сетках. Рассмотрен простейший случай одномерного уравнения переноса в декартовой системе координат. Метод допускает очевидное обобщение на многомерный случай, а также на случай решения уравнения переноса в криволинейной системе координат.

НС-метод является двухэтапным. Первый этап — приближенное численное решение уравнения переноса по алгоритму бегущего счета во всех точках фазового пространства методом простой итерации. Второй этап — построение системы сеточных уравнений относительно функции скалярного потока, связывающей ее значения в данной точке пространственной сетки со значениями в соседних интервалах. Способ конструирования уравнений второго этапа обеспечивает согласованность НС-метода ускорения сходимости простых итераций.

Приведены результаты численных исследований, подтверждающие высокую эффективность НС-метода и его безусловную сходимость.

Ключевые слова: уравнение переноса, итерационные методы решения сеточных уравнений, методы ускорения, НС-метод.

Введение

Численное решение задач переноса с учетом взаимодействия частиц со средой в кинетическом приближении является сложной научной проблемой. Прежде всего это обусловлено большой размерностью задачи (в случае трехмерной нестационарной задачи искомое решение уравнения переноса зависит от семи независимых переменных) и изменением в весьма широком диапазоне оптических свойств пространственных областей, где ищется решение.

При применении сеточных методов решения уравнения переноса используют, как правило, итерационные методы. В основном, они базируются на методе простых итераций (итерации по источнику). К сожалению, скорость сходимости простых итераций во многих практически важных задачах переноса является неприемлемо низкой. С учетом этого широкое применение получили двухэтапные методы. В них на первом этапе решается уравнение переноса с известной с предыдущей итерации правой частью. На втором этапе итерационное приближение к решению, полученное на первом этапе, уточняется с помощью специальных уравнений метода ускорения.

К конструированию уравнений метода ускорения предъявляется ряд важных требований. Очевидно, что должна быть существенно повышена скорость сходимости итерационного процесса по сравнению с методом простых итераций. Должны быть предложены экономичные методы решения сеточных уравнений метода ускорения. Важнейшим является требование безусловной сходимости двухэтапного итерационного процесса. При применении сеточных методов необходима согласованность аппроксимации уравнений, используемых на первом и втором этапах итерационного процесса [1, 2].

К настоящему времени разработаны различные методы ускорения (см., например, [3, 4]). Однако в общем многомерном случае проблема построения эффективных методов ускорения, удовлетворяющих указанным требованиям, остается открытой.

Новизна настоящей работы заключается в разработке нового метода ускорения сходимости, названного нелинейным согласованным методом (НС-методом). В данной работе рассматривается случай решения одномерного уравнения переноса в декартовой системе координат в одномерной геометрии.

Отметим основные особенности и свойства построенного НС-метода:

1. Метод основывается на аппроксимации уравнения переноса на первом этапе с использованием разностной схемы с сеточным шаблоном внутри ячейки пространственной сетки. В качестве такой разностной схемы в работе используется МР-схема [5], обеспечивающая положительность сеточного решения.
2. На втором этапе НС-метода вводится система сеточных уравнений переноса, записанная относительно функций скалярного потока. Коэффициентами уравнений этой системы служат нелинейные функционалы, вычисленные на первом этапе. В случае аппроксимации уравнения переноса, решаемого на первом этапе, по положительной разностной схеме, данные функционалы являются знакопостоянными. Структура матрицы коэффициентов построенной таким образом системы сеточных уравнений допускает возможность нахождения решения прямым экономичным методом многодиагональной прогонки.
3. Конструкция НС-метода обеспечивает согласованность сеточных аппроксимаций на первом и втором этапах.
4. Обеспечиваются безусловная сходимость и весьма высокая скорость сходимости итерационного процесса в различных классах задач.
5. НС-метод допускает очевидным образом обобщение на случаи многомерных задач и записи уравнения переноса в криволинейных системах координат, что будет подтверждено дальнейшими публикациями.

Постановка задачи

Рассмотрим одномерное стационарное уравнение переноса, записанное в декартовой системе координат:

$$\mu\frac{\partial N}{\partial x}+\alpha N=\frac{\beta}{2}n^{(0)}+\frac{Q}{2}, \tag{1}$$

где $\mu=\cos\varphi$, φ — угол, определяющий направление полета частиц; x — пространственная координата; $N=N\left(x,\mu\right)$ — искомая функция потока частиц в фазовом пространстве; $\alpha=\alpha\left(x\right)$, $\beta=\beta\left(x\right)$ — заданные функции, определяющие взаимодействие частиц со средой; $n^{(0)}=n^{(0)}\left(x\right)$ — функция скалярного потока, $n^{(0)}\left(x\right)=\int\limits_{-1}^{1}N\left(x,\mu\right)d\mu$.

Решение задачи будем искать на отрезке $a<x<b$ с заданными граничными условиями

$$N|_{x=a}=\varphi_1,\quad 0<\mu\leq 1;\qquad N|_{x=b}=\varphi_2,\quad -1\leq\mu<0.$$

Введем для простоты равномерные разностные сетки с шагами h по пространственной переменной (рис. 1) и $\Delta\mu$ — по угловой:

$$-1=\mu_0<\mu_1<\ldots<\mu_{q1}=1;\qquad \mu_{q+1/2}=\frac{\mu_q+\mu_{q+1}}{2},\quad q=\overline{0,q1-1}.$$

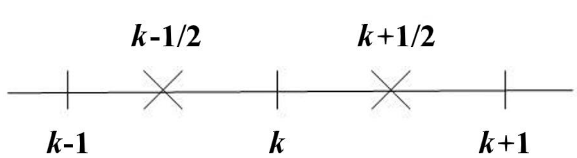

Рис. 1. Пространственная сетка

Аппроксимируем уравнение (1) с использованием разностной (конечно-элементной) схемы с сеточным шаблоном, содержащим узлы со значениями искомой функции в одном интервале сетки, а именно на концах и в центре ячейки. Для аппроксимации уравнения переноса на этом шаблоне используем уравнение баланса в ячейке сетки и некоторые замыкающие соотношения, связывающие значения сеточных функций в указанных точках шаблона. Отметим, что такие схемы находят широкое применение при численном решении уравнения переноса на структурированных сетках. Это, например, схемы DS_n-метода [6], нелинейная реберная MP-схема [5]. Сеточные уравнения для подобных схем допускают запись в следующем общем виде:

$$\mu_{q+1/2}\left(N_{k+1,q+1/2}-N_{k,q+1/2}\right)+\alpha_{k+1/2}hN_{k+1/2,q+1/2}=\frac{h\beta_{k+1/2}}{2}n^{(0)}_{k+1/2}+\frac{hQ_{k+1/2}}{2}; \tag{2}$$

$$\begin{aligned} N_{k+1,q+1/2}={}&c_{k+1/2,q+1/2}N_{k+1/2,q+1/2}+c_{k,q+1/2}N_{k,q+1/2}+d_{k+1,q+1/2}n^{(0)}_{k+1}+\\ &+d_{k+1/2,q+1/2}n^{(0)}_{k+1/2}+d_{k,q+1/2}n^{(0)}_{k}+f_{k+1/2,q+1/2},\qquad q\in\left[\frac{q1}{2},q1-1\right]; \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} N_{k,q+1/2}={}&c_{k+1/2,q+1/2}N_{k+1/2,q+1/2}+c_{k+1,q+1/2}N_{k+1,q+1/2}+d_{k+1,q+1/2}n^{(0)}_{k+1}+\\ &+d_{k+1/2,q+1/2}n^{(0)}_{k+1/2}+d_{k,q+1/2}n^{(0)}_{k}+f_{k+1/2,q+1/2},\qquad q\in\left[0,\frac{q1}{2}-1\right]; \end{aligned} \tag{4}$$

$$k=\overline{0,k1-1}.$$

В дальнейшем при выводе уравнений НС-метода ограничимся рассмотрением схем указанного типа. При этом будет использована их запись в общем виде (2)—(4).

Решение сеточных уравнений переноса

Приведем вывод уравнений НС-метода для решения сеточных уравнений переноса. НС-метод является двухэтапным.

На первом этапе решается уравнение переноса с правой частью, найденной на предыдущей итерации:

$$\mu_{q+1/2}\left(N^{s+1/2}_{k+1,q+1/2}-N^{s+1/2}_{k,q+1/2}\right)+\alpha_{k+1/2}hN^{s+1/2}_{k+1/2,q+1/2}=\frac{h\beta_{k+1/2}}{2}\overset{s}{n}{}^{(0)}_{k+1/2}+\frac{hQ_{k+1/2}}{2}$$

с дополнительными соотношениями

$$N^{s+1/2}_{k+1,q+1/2}=c_{k+1/2,q+1/2}N^{s+1/2}_{k+1/2,q+1/2}+c_{k,q+1/2}N^{s+1/2}_{k,q+1/2}+f1^{s}_{k+1/2,q+1/2},\qquad q\in\left[\frac{q1}{2},q1-1\right];$$

$$N^{s+1/2}_{k,q+1/2}=c_{k+1/2,q+1/2}N^{s+1/2}_{k+1/2,q+1/2}+c_{k+1,q+1/2}N^{s+1/2}_{k+1,q+1/2}+f1^{s}_{k+1/2,q+1/2},\qquad q\in\left[0,\frac{q1}{2}-1\right],$$

где $k=\overline{0,k1-1}$; s, $s+1/2$ — номера итераций;

$$f1^{s}_{k+1/2,q+1/2}=d_{k+1,q+1/2}\overset{s}{n}{}^{(0)}_{k+1}+d_{k+1/2,q+1/2}\overset{s}{n}{}^{(0)}_{k+1/2}+d_{k,q+1/2}\overset{s}{n}{}^{(0)}_{k}+f_{k+1/2,q+1/2}.$$

С целью построения уравнений второго этапа введем в рассмотрение следующие функционалы, значения которых вычислим с использованием сеточного решения, найденного на первом этапе:

$$\begin{aligned} &\overset{s+1/2}{c_p^{+}}=\frac{\sum\limits_{q=q1/2}^{q1-1}c_{p,q+1/2}N^{s+1/2}_{p,q+1/2}\Delta\mu}{\overset{s+1/2}{n_p^{+}}}; \qquad \overset{s+1/2}{c_p^{-}}=\frac{\sum\limits_{q=0}^{q1/2-1}c_{p,q+1/2}N^{s+1/2}_{p,q+1/2}\Delta\mu}{\overset{s+1/2}{n_p^{-}}};\\ &\overset{s+1/2}{M_p^{+}}=\frac{\sum\limits_{q=q1/2}^{q1-1}\mu_{q+1/2}N^{s+1/2}_{p,q+1/2}\Delta\mu}{\overset{s+1/2}{n_p^{+}}}; \qquad \overset{s+1/2}{M_p^{-}}=\frac{\sum\limits_{q=0}^{q1/2-1}\mu_{q+1/2}N^{s+1/2}_{p,q+1/2}\Delta\mu}{\overset{s+1/2}{n_p^{-}}};\\ &p=k,\ k+1;\qquad k=\overline{0,k1-1}. \end{aligned} \tag{5}$$

Далее просуммируем выражения (3), соответствующие интервалам угловой сетки с положительными значениями μ. Путем очевидных алгебраических преобразований получим

$$\left(1 - d_{k+1}^{+}\right) n_{k+1}^{+} = \left(\overset{s+1/2}{c_{k+1/2}^{+}} + d_{k+1/2}^{+}\right) n_{k+1/2}^{+} + \left(\overset{s+1/2}{c_{k}^{+}} + d_{k}^{+}\right) n_{k}^{+} + d_{k+1/2}^{+} n_{k+1/2}^{-} + d_{k}^{+} n_{k}^{-} + f_{k+1/2}^{+}, \quad (6)$$

где $d_p^{+} = \sum\limits_{q=q1/2}^{q1-1} d_{p,q+1/2}\Delta\mu, \quad p = k,\, k+1; \qquad f_{k+1/2}^{+} = \sum\limits_{q=q1/2}^{q1-1} f_{k+1/2,q+1/2}\Delta\mu;$

$$\begin{gathered} n_k^{+} = \sum_{q=q1/2}^{q1-1} N_{k,q+1/2}\Delta\mu; \quad n_{k+1}^{+} = \sum_{q=q1/2}^{q1-1} N_{k+1,q+1/2}\Delta\mu; \quad n_{k+1/2}^{+} = \sum_{q=q1/2}^{q1-1} N_{k+1/2,q+1/2}\Delta\mu; \\ n_k^{-} = \sum_{q=0}^{q1/2-1} N_{k,q+1/2}\Delta\mu; \quad n_{k+1}^{-} = \sum_{q=0}^{q1/2-1} N_{k+1,q+1/2}\Delta\mu; \quad n_{k+1/2}^{-} = \sum_{q=0}^{q1/2-1} N_{k+1/2,q+1/2}\Delta\mu; \\ k = \overline{0, k1-1}. \end{gathered} \quad (7)$$

Очевидно, что

$$n_k = n_k^{+} + n_k^{-}; \quad n_{k+1} = n_{k+1}^{+} + n_{k+1}^{-}; \quad n_{k+1/2} = n_{k+1/2}^{+} + n_{k+1/2}^{-}.$$

Путем проведения аналогичных преобразований для интервалов угловой сетки, соответствующих значениям $\mu < 0$, получим

$$\left(1 - d_{k}^{-}\right) n_{k}^{-} = \left(\overset{s+1/2}{c_{k+1/2}^{-}} + d_{k+1/2}^{-}\right) n_{k+1/2}^{-} + \left(\overset{s+1/2}{c_{k+1}^{-}} + d_{k+1}^{-}\right) n_{k+1}^{-} + d_{k+1/2}^{-} n_{k+1/2}^{+} + d_{k+1}^{-} n_{k+1}^{+} + f_{k+1/2}^{-}, \quad (8)$$

где $d_p^{-} = \sum\limits_{q=0}^{q1/2-1} d_{p,q+1/2}\Delta\mu, \quad p = k,\, k+1; \qquad f_{k+1/2}^{-} = \sum\limits_{q=0}^{q1/2-1} f_{k+1/2,q+1/2}\Delta\mu; \qquad k = \overline{0, k1-1}.$

Рассмотрим уравнение (2) баланса частиц в ячейке сетки. Суммируя уравнения для фиксированной k-й ($k = \overline{0, k1-1}$) ячейки пространственной сетки по интервалам угловой сетки, отдельно для положительных и отрицательных значений переменной μ, получим соответственно уравнения

$$\begin{gathered} \sum_{q=q1/2}^{q1-1} \mu_{q+1/2}\left(N_{k+1,q+1/2} - N_{k,q+1/2}\right) + \alpha_{q+1/2} h n_{k+1/2}^{+} = \frac{h\beta_{k+1/2}}{2} n_{k+1/2} + \frac{Q_{k+1/2}h}{2}; \\ \sum_{q=0}^{q1/2-1} \mu_{q+1/2}\left(N_{k,q+1/2} - N_{k+1,q+1/2}\right) + \alpha_{q+1/2} h n_{k+1/2}^{-} = \frac{h\beta_{k+1/2}}{2} n_{k+1/2} + \frac{Q_{k+1/2}h}{2}. \end{gathered} \quad (9)$$

Отсюда, используя значения функционалов (5), получаем следующие уравнения:

$$\begin{gathered} M_{k+1}^{+} n_{k+1}^{+} - M_k^{+} n_k^{+} + \alpha_{q+1/2} h n_{k+1/2}^{+} = \frac{h\beta_{k+1/2}}{2}\left(n_{k+1/2}^{+} + n_{k+1/2}^{-}\right) + \frac{Q_{k+1/2}h}{2}; \\ M_{k+1}^{-} n_{k+1}^{-} - M_k^{-} n_k^{-} + \alpha_{q+1/2} h n_{k+1/2}^{-} = \frac{h\beta_{k+1/2}}{2}\left(n_{k+1/2}^{+} + n_{k+1/2}^{-}\right) + \frac{Q_{k+1/2}h}{2}; \\ k = \overline{0, k1-1}. \end{gathered} \quad (10)$$

Таким образом, построена система уравнений (6)—(10) второго этапа НС-метода. Неизвестными в этой системе являются сеточные функции односторонних скалярных потоков $n_{k+1/2}^{+}$, $n_{k+1/2}^{-}$, определенные в центрах ячеек, и n_k^{-}, n_k^{+}, определенные в узлах сетки. Для замыкания полученную систему следует дополнить следующими граничными условиями:

$$n^{+}\big|_{x=a} = \sum_{q=q1/2}^{q1-1} \varphi_{1\,q+1/2}\Delta\mu; \qquad n^{-}\big|_{x=b} = \sum_{q=0}^{q1/2-1} \varphi_{2\,q+1/2}\Delta\mu. \quad (11)$$

С целью обеспечения экономичности итерационного процесса НС-метода расчет функционалов (5) целесообразно проводить на выделенных l-итерациях.

С учетом сказанного запишем окончательный вид итерационного НС-метода.

Этап 1. Решается система уравнений

$$
\begin{aligned}
&\mu_{q+1/2}\left(N^{s+1/2,l}_{k+1,q+1/2}-N^{s+1/2,l}_{k,q+1/2}\right)+\alpha_{k+1/2}hN^{s+1/2,l}_{k+1/2,q+1/2}=\frac{h\beta_{k+1/2}}{2}\left(\overset{s,l}{n}{}^{+}_{k+1/2}+\overset{s,l}{n}{}^{-}_{k+1/2}\right)+\frac{hQ_{k+1/2}}{2};\\
&N^{s+1/2}_{k+1,q+1/2}=c_{k+1/2,q+1/2}N^{s+1/2}_{k+1/2,q+1/2}+c_{k,q+1/2}N^{s+1/2}_{k,q+1/2}+f1^{s}_{k+1/2,q+1/2},\quad q\in\left[\frac{q1}{2},q1-1\right];\\
&N^{s+1/2}_{k,q+1/2}=c_{k+1/2,q+1/2}N^{s+1/2}_{k+1/2,q+1/2}+c_{k+1,q+1/2}N^{s+1/2}_{k+1,q+1/2}+f1^{s}_{k+1/2,q+1/2},\quad q\in\left[0,\frac{q1}{2}-1\right];\\
&f1^{s}_{k+1/2,q+1/2}=d_{k+1,q+1/2}\left(\overset{s}{n}{}^{-}_{k+1}+\overset{s}{n}{}^{+}_{k+1}\right)+d_{k+1/2,q+1/2}\left(\overset{s}{n}{}^{-}_{k+1/2}+\overset{s}{n}{}^{+}_{k+1/2}\right)+\\
&\qquad\qquad+d_{k,q+1/2}\left(\overset{s}{n}{}^{-}_{k}+\overset{s}{n}{}^{+}_{k}\right)+f_{k+1/2,q+1/2};\\
&n^{+}_{p}=\sum_{q=q1/2}^{q1-1}N_{p,q+1/2}\Delta\mu;\quad n^{-}_{p}=\sum_{q=0}^{q1/2-1}N_{p,q+1/2}\Delta\mu;\quad p=k,\,k+1,\quad k=\overline{0,k1-1},
\end{aligned}
\tag{12}
$$

где s — номер основного итерационного процесса; l — номер итерации, на которой осуществляется пересчет функционалов. На l-итерациях уравнения первого этапа следует дополнить выражениями

$$
\overset{l}{c}{}^{+}_{p}=\frac{\sum\limits_{q=q1/2}^{q1-1}c_{p,q+1/2}N^{s+1/2,l}_{p,q+1/2}\Delta\mu}{\overset{s+1/2,l}{n}{}^{+}_{p}},\quad \overset{l}{M}{}^{+}_{p}=\frac{\sum\limits_{q=q1/2}^{q1-1}\mu_{q+1/2}N^{s+1/2,l}_{p,q+1/2}\Delta\mu}{\overset{s+1/2,l}{n}{}^{+}_{p}},\quad p=k,\,k+1;
\tag{13}
$$

$$
\overset{l}{c}{}^{-}_{p}=\frac{\sum\limits_{q=0}^{q1/2-1}c_{p,q+1/2}N^{s+1/2,l}_{p,q+1/2}\Delta\mu}{\overset{s+1/2,l}{n}{}^{-}_{p}},\quad \overset{s+1/2,l}{M}{}^{-}_{p}=\frac{\sum\limits_{q=0}^{q=q1/2-1}\mu_{q+1/2}N^{s+1/2,l}_{p,q+1/2}\Delta\mu}{\overset{s+1/2,l}{n}{}^{-}_{p}},\quad p=k+1,\,k.
\tag{14}
$$

Этап 2. Решается система уравнений

$$
\begin{aligned}
\left(1-d^{+}_{k+1}\right)\overset{s+1,l}{n}{}^{+}_{k+1}&=\left(\overset{l}{c}{}^{+}_{k+1/2}+d^{+}_{k+1/2}\right)\overset{s+1,l}{n}{}^{+}_{k+1/2}+\left(\overset{l}{c}{}^{+}_{k}+d^{+}_{k}\right)\overset{s+1,l}{n}{}^{+}_{k}+\\
&+d^{+}_{k+1/2}\overset{s+1,l}{n}{}^{-}_{k+1/2}+d^{+}_{k}\overset{s+1,l}{n}{}^{-}_{k}+f^{+}_{k+1/2};\\
\left(1-d^{-}_{k}\right)\overset{s+1,l}{n}{}^{-}_{k}&=\left(\overset{l}{c}{}^{-}_{k+1/2}+d^{-}_{k+1/2}\right)\overset{s+1,l}{n}{}^{-}_{k+1/2}+\left(\overset{l}{c}{}^{-}_{k+1}+d^{-}_{k+1}\right)\overset{s+1,l}{n}{}^{-}_{k+1}+\\
&+d^{-}_{k+1/2}\overset{s+1,l}{n}{}^{+}_{k+1/2}+d^{-}_{k+1}\overset{s+1,l}{n}{}^{+}_{k+1}+f^{-}_{k+1/2}
\end{aligned}
\tag{15}
$$

и соответственно

$$
\begin{aligned}
&\overset{l}{M}{}^{+}_{k+1}\overset{s+1,l}{n}{}^{+}_{k+1}-\overset{l}{M}{}^{+}_{k}\overset{s+1,l}{n}{}^{+}_{k}+\alpha_{q+1/2}h\overset{s+1,l}{n}{}^{+}_{k+1/2}=\frac{h\beta_{k+1/2}}{2}\left(\overset{s+1,l}{n}{}^{+}_{k+1/2}+\overset{s+1,l}{n}{}^{-}_{k+1/2}\right)+\frac{Q_{k+1/2}h}{2};\\
&\overset{l}{M}{}^{-}_{k}\overset{s+1,l}{n}{}^{-}_{k}-\overset{l}{M}{}^{-}_{k+1}\overset{s+1,l}{n}{}^{-}_{k+1}+\alpha_{q+1/2}h\overset{s+1,l}{n}{}^{-}_{k+1/2}=\frac{h\beta_{k+1/2}}{2}\left(\overset{s+1,l}{n}{}^{+}_{k+1/2}+\overset{s+1,l}{n}{}^{-}_{k+1/2}\right)+\frac{Q_{k+1/2}h}{2};
\end{aligned}
\tag{16}
$$

$$
\overset{s}{n}{}^{(0)}=\overset{s}{n}{}^{-}+\overset{s}{n}{}^{+}.
$$

Система дополняется граничными условиями (11).

Итерационный процесс (12)—(16) повторяется до достижения заданной точности по критерию

$$\left| \overset{s+1}{n}{}^{(0)}_{k+1/2} - \overset{s}{n}{}^{(0)}_{k+1/2} \right| \le \varepsilon_0 \overset{s+1}{n}{}^{(0)}_{k+1/2} + \varepsilon_1, \tag{17}$$

где ε_0, ε_1 — заданные константы; $k = \overline{0, k1-1}$.

Численные исследования

Задача 1. В области $\Pi = \{0 \le x \le 16\}$ решается уравнение переноса с нулевыми граничными условиями. Начальное значение полного количества частиц в системе $n^{(0)} = 1$. Независимый источник нейтронов $Q = 1$. Константы среды $\alpha = 100$; $\beta = 99$.

Проведена серия расчетов на сгущающихся пространственных сетках. При этом во всех расчетах использовалась сетка по угловой переменной из 12 равномерных интервалов.

Численное решение краевой задачи для уравнения переноса на указанных сетках было выполнено с использованием метода простой итерации и итерационного НС-метода. Во всех выполненных расчетах итерации сводились с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$ по критерию $\left| \overset{s+1}{n}{}^{(0)}_{k+1/2} - n^{(0)}_{\text{точ}\ k+1/2} \right| \le \varepsilon$, где $n^{(0)}_{\text{точ}\ k+1/2}$ — точное решение. При этом в качестве точного было использовано решение, найденное по НС-методу с точностью $\varepsilon = 10^{-7}$ по критерию (17).

В табл. 1 представлены сравнительные данные о количестве итераций при решении уравнения переноса указанными методами на разных пространственных сетках.

На рис. 2 показана зависимость коэффициента роста числа итераций k при сгущении пространственной сетки: $k = P_n/P_1$, где P_1 и P_n — число итераций соответственно на рассматриваемой и начальной (грубой) сетках.

Как видно из рис. 2, при применении НС-метода число итераций при сгущении пространственной сетки растет по закону, близкому к линейному. Для метода простой итерации наблюдается близкий к квадратичному характер роста числа итераций. Использование НС-метода позволяет существенно сократить количество итераций.

Таблица 1

Количество итераций при сгущении пространственной сетки

h	Простая итерация	НС-метод	Коэффициент ускорения
0,125	913	101	9
0,0625	6 672	245	27
0,03	7 768	392	20
0,01	13 113	489	26

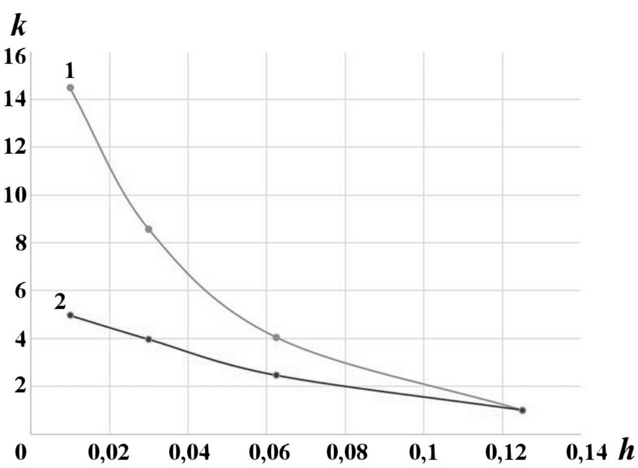

Рис. 2. Рост числа итераций при сгущении пространственной сетки: 1 — простая итерация; 2 — НС-метод

Задача 2. Рассматривается чисто рассеивающая среда ($\alpha = \beta$). Геометрия аналогична задаче 1. Выполнена серия расчетов с варьированием значений коэффициента α.

Расчеты проводились на равномерной пространственной сетке с шагом $h = 0{,}2$. По угловой переменной взято 12 интервалов. В качестве результата рассматривался скалярный поток $n^{(0)}$. Расчеты выполнены с использованием критериев сходимости, приведенных в задаче 1.

В табл. 2 представлены данные о количестве итераций при использовании метода простых итераций и НС-метода. Как и в задаче 1, применение НС-метода обеспечивает существенное сокращение числа итераций.

Таблица 2

Количество итераций при изменении коэффициентов $\alpha = \beta$

$\alpha = \beta$	Простая итерация	НС-метод	Коэффициент ускорения
1	627	48	13
4	3 510	59	59
8	5 921	67	88
50	13 872	136	102

Заключение

В работе построен НС-метод ускорения сходимости итераций для решения одномерных задач переноса на структурированных сетках. Как и другие методы ускорения сходимости итераций, НС-метод является двухэтапным. На первом этапе итерационного процесса приближенное численное решение уравнения переноса с заданной точностью вычисляется по алгоритму бегущего счета во всех точках фазового пространства. На втором этапе используется система сеточных уравнений относительно функции скалярного потока, связывающая ее значения в данной точке пространственной сетки со значениями в соседних интервалах. Коэффициентами уравнений системы служат нелинейные функционалы, вычисленные на основе итерационного приближения к решению, найденного на первом этапе. Структура матрицы коэффициентов построенной таким образом системы сеточных уравнений допускает возможность ее решения прямым экономичным методом многодиагональной прогонки.

Результаты численных исследований показали высокую эффективность НС-метода. Как следует из построения НС-метода, он допускает обобщение на случай решения уравнения переноса в многомерной геометрии, а также на случаи криволинейных систем координат.

Список литературы

1. *Трощиёв В. Е.* Решение кинетического уравнения и уравнения квазидиффузии по согласованным разностным схемам // Численные методы решения задач математической физики. М.: Наука, 1966. С. 177—185.
   Troshchiyev V. E. Reshenie kineticheskogo uravneniya i uravneniya kvazidiffuzii po soglasovannym raznostnym skhemam // Chislennye metody resheniya zadach matematicheskoy fiziki. M.: Nauka, 1966. S. 177—185.

2. *Юдинцев В. Ф.* О сходимости поправочных методов ускорения итераций для уравнения переноса в разностной форме // Числ. методы мех. спл. среды. 1981. Т. 12, № 5. С. 148—165.
   Yudintsev V. F. O skhodimosti popravochnykh metodov uskoreniya iteratsiy dlya uravneniya perenosa v raznostnoy forme // Chisl. metody mekh. spl. sredy. 1981. T. 12, № 5. S. 148—165.

3. *Федотова Л. П., Шагалиев Р. М.* Конечно-разностный КМ-метод для математического моделирования двумерных нестационарных процессов переноса в многогрупповом кинетическом приближении // Математическое моделирование. 1991. Т. 3, № 6. С. 29—42.
   Fedotova L. P., Shagaliev R. M. Konecho-raznostny KM-metod dlya matematicheskogo modelirovaniya dvumernykh nestatsionarnykh protsessov perenosa v mnogogruppovom kineticheskom priblizhenii // Matematicheskoe modelirovanie. 1991. T. 3, № 6. S. 29—42.

4. *Евдокимов В. В., Шагалиев Р. М.* Согласованный метод ускорения итераций при решении двумерных задач переноса на неортогональных сетках по схемам типа DS_n-метода // Вопросы

атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1994. Вып. 3. С. 11—17.
Evdokimov V. V., Shagaliev R. M. Soglasovanny metod uskoreniya iteratsiy pri reshenii dvumernykh zadach perenosa na neortogonalnykh setkakh po skhemam tipa DS_n-metoda // Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov. 1994. Vyp. 3. S. 11—17.

5. *Шагалиев Р. М., Баранова А. А., Плетенёва Н. П.* МР-схема (монотонно-реберная разностная схема) для численного решения уравнения переноса // 15-я науч.-техн. конф. "Молодежь в науке". 25—27 октября 2017 г. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2018.
Shagaliev R. M., Baranova A. A., Pletenyeva N. P. MR-skhema (monotonno-ryebernaya raznostnaya skhema) dlya chislennogo resheniya uravneniya perenosa // 15-ya nauch.-tekh. konf. "Molodyezh v nauke". 25—27 oktyabrya 2017 g. Sarov: RFYaTs-VNIIEF, 2018.
6. *Басс Л. П., Волощенко А. М., Гермогенова Т. А.* Методы дискретных ординат в задачах о переносе излучения. М.: ИПМ АН СССР, 1986.
Bass L. P., Voloshchenko A. M., Germogenova T. A. Metody diskretnykh ordinat v zadachakh o perenose izlucheniya. M.: IPM AN SSSR, 1986.

Статья поступила в редакцию 23.11.20.

NONLIENEAR CONSISTENT METHOD (NC-METHOD) TO ACCELERATE CONVERGENCE OF ITERATIONS FOR TRANSPORT EQUATION / R. M. Shagaliev, A. A. Busalov (FSUE "RFNC-VNIIEF", Sarov, N. Novgorod region).

The paper is devoted to constructing a new convergence accelerating method, namely, the nonlinear consistent method (NC-method) for one-dimensional computations. The NC-method is derived as applied to the grid approximation of the transport equation using a difference scheme that provides positive grid solutions on structured grids. The simplest case of a 1D transport equation in Cartesian coordinates is considered. The method admits generalization to a multidimensional case and can be also used to solve the transport equation in curvilinear coordinates.

This is a two-stage method. The first stage is finding an approximate solution to the transport equation with the simple iteration method using the sweep algorithm at all points of the phase space. The second stage is constructing a system of grid equations relative to the scalar flow function that associates its values at a given point of the space grid with the values in neighboring intervals. The way of constructing the second stage equations ensures the consistency of the NC-method of accelerating the convergence of simple iterations.

Results of numerical studies are given and they demonstrate a high efficiency of the NC-method and its unconditional convergence.

Key words: the transport equation, iterative methods for solving grid equations, acceleration methods, the NC-method.