

УДК 519.6

ОБ ОДНОМ СЧЕТНОМ ЭФФЕКТЕ НЕФИЗИЧНОГО ПРОГРЕВА ВЕЩЕСТВА ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ПЕРЕНОСА ТЕПЛОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

А. И. Бочков, В. Ю. Резчиков, В. В. Сучкова
(ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области)

При численном решении задач переноса теплового излучения могут проявляться различные сеточные и численные эффекты, которые не связаны с физикой моделируемых процессов и затрудняют правильную интерпретацию результатов расчетов. В статье рассмотрен счетный эффект, описание которого авторы не встречали в научной литературе. Этот счетный эффект нефизичного (не являющегося решением системы интегродифференциальных уравнений переноса излучения и не укладывающегося в рамки описания физического процесса) ускоренного прогрева вещества вызван сочетанием двух факторов: сильной анизотропии входящего потока излучения по направлениям полета частиц и особенностью некоторых разностных схем второго порядка точности. Приведена постановка одномерной модельной задачи, в которой наглядно проявляется счетный эффект, и установлены причины его возникновения. Для борьбы с обнаруженным эффектом предложено несколько модификаций расчетной схемы, которые позволяют практически полностью избавиться от артефактов в численном решении.

Ключевые слова: перенос излучения, численное моделирование, счетный эффект.

Введение

В работах [1, 2] приведено описание сеточных и численных эффектов, которые проявляются при численном моделировании задач переноса теплового излучения. Эти эффекты не связаны с физикой описываемых процессов и мешают правильной интерпретации результатов расчетов.

В настоящей статье приведен еще один счетный эффект, описание которого авторы не встречали в научной литературе. Этот эффект был обнаружен при проведении расчетов задач переноса излучения в двумерной постановке на ортогональных пространственных сетках. Он заключается в ускоренном прогреве вещества, не соответствующем физике исследуемого процесса. Проведенные численные исследования показали, что эффект нефизичного прогрева вещества вызван сочетанием двух факторов: сильной анизотропии входящего потока излучения по направлениям полета частиц и особенностью разностных схем второго порядка точности, использующих дополнительные аппроксимационные соотношения (например, DD-схемы [3]).

Постановка задачи

Рассмотрим систему уравнений переноса излучения и энергии в плоском слое в приближении серой материи без учета движения среды и рассеяния:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I}{\partial t} + \mu \frac{\partial I}{\partial x} + \alpha I = \alpha B; \quad (1)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \alpha \left(I^{(0)} - 2B \right), \quad I^{(0)} = \int_{-1}^1 I d\mu, \quad (2)$$

где c — скорость света в вакууме; t — время; x — пространственная координата; μ — косинус угла между направлением полета фотонов и осью OX ; $I(t, x, \mu)$ — интенсивность излучения в момент времени t в точке x в направлении μ ; $\alpha(x, T)$ — коэффициент поглощения излучения; $B(T) = \sigma T^4$ — интенсивность равновесного излучения ($\sigma = 2058$); $T(t, x)$ — температура вещества; $\varepsilon(T)$ — удельная внутренняя энергия вещества; $I^{(0)}$ — плотность потока энергии излучения.

Система уравнений (1), (2) решается в области фазового пространства $D = \{t_0 \leq t \leq t_k; a \leq x \leq b; -1 \leq \mu \leq 1\}$ с соответствующими начальными и граничными условиями:

$$\begin{aligned} I(t, x, \mu)|_{t=t_0} &= I_0(x, \mu), & T(t, x)|_{t=t_0} &= T_0(x); \\ I(t, a, \mu)|_{\mu>0} &= I_a(t, \mu), & I(t, b, \mu)|_{\mu<0} &= I_b(t, \mu). \end{aligned}$$

Алгоритм численного решения

Введем разностную сетку по переменным t (индекс n), x (индекс i) и μ (индекс j), и аппроксимируем уравнение (1), используя DS_n -метод [3]:

$$\frac{1}{c} \frac{I_{i+1/2, j+1/2}^{n+1} - I_{i+1/2, j+1/2}^n}{\Delta t} + \mu_{j+1/2} \frac{I_{i+1, j+1/2}^{n+1} - I_{i, j+1/2}^{n+1}}{\Delta x} + \alpha_{i+1/2}^{n+1} I_{i+1/2, j+1/2}^{n+1} = \alpha_{i+1/2}^{n+1} B_{i+1/2}^{n+1}, \quad (3)$$

где $\Delta t \equiv \Delta t^{n+1/2} = t^{n+1} - t^n$, $\Delta x \equiv \Delta x_{i+1/2} = x_{i+1} - x_i$.

Для замыкания системы сеточных уравнений (3) по пространственной переменной x воспользуемся дополнительным аппроксимационным соотношением WDD-схемы [4]:

$$I_{i+1/2, j+1/2}^{n+1} = \begin{cases} \delta I_{i+1, j+1/2}^{n+1} + (1 - \delta) I_{i, j+1/2}^{n+1}, & \mu > 0; \\ \delta I_{i, j+1/2}^{n+1} + (1 - \delta) I_{i+1, j+1/2}^{n+1}, & \mu < 0, \end{cases} \quad (4)$$

где $0,5 \leq \delta \leq 1$ — вес, определяющий порядок аппроксимации: при $\delta = 0,5$ получаем DD-схему второго порядка аппроксимации, при $\delta = 1$ — ST-схему первого порядка.

В общем случае при $\delta < 1$ WDD-схема является неположительной и немонотонной. Для обеспечения положительности сеточного решения применяется коррекция Латропа *zero fix up*, также известная как метод балансного зануления [5, 6].

Уравнение энергии (2) аппроксимируется согласованно с уравнением (1):

$$\frac{\varepsilon_{i+1/2}^{n+1} - \varepsilon_{i+1/2}^n}{\Delta t} = \alpha_{i+1/2}^{n+1} \left(I_{i+1/2}^{(0)n+1} - 2B_{i+1/2}^{n+1} \right), \quad (5)$$

где $I_{i+1/2}^{(0)n+1} = \sum_j I_{i+1/2, j+1/2}^{n+1} \Delta \mu_{j+1/2}$, $\Delta \mu_{j+1/2} = \mu_{j+1} - \mu_j$.

Для численного решения полученной системы разностных уравнений (3)–(5) используем метод оценки итерационных отклонений Морозова [7]. В результате система уравнений решается в два этапа.

На первом этапе $(s + 1)$ -го итерационного шага применяется метод простой итерации по источнику:

$$\frac{1}{c} \frac{I_{i+1/2, j+1/2}^{n+1, s+1/2} - I_{i+1/2, j+1/2}^n}{\Delta t} + \mu_{j+1/2} \frac{I_{i+1, j+1/2}^{n+1, s+1/2} - I_{i, j+1/2}^{n+1, s+1/2}}{\Delta x} + \alpha_{i+1/2}^{n+1, s} I_{i+1/2, j+1/2}^{n+1, s+1/2} = \alpha_{i+1/2}^{n+1, s} B_{i+1/2}^{n+1, s}. \quad (6)$$

На втором этапе $(s + 1)$ -го итерационного шага решается уравнение относительно поправки $\Delta I^{s+1} = I^{s+1} - I^{s+1/2}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\Delta I_{i+1/2, j+1/2}^{n+1, s+1}}{\Delta t} + \mu_{j+1/2} \frac{\Delta I_{i+1, j+1/2}^{n+1, s+1} - \Delta I_{i, j+1/2}^{n+1, s+1}}{\Delta x} + \alpha_{i+1/2}^{n+1, s} \Delta I_{i+1/2, j+1/2}^{n+1, s+1} = \\ = \alpha_{i+1/2}^{n+1, s} \left(B_{i+1/2}^{n+1, s+1} - B_{i+1/2}^{n+1, s} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

В уравнении (7) функция $B_{i+1/2}^{n+1, s+1}$ неизвестна, так как неизвестна температура $T_{i+1/2}^{n+1, s+1}$. Определим значение температуры из уравнения энергии на $(s+1)$ -й итерации

$$\frac{\varepsilon_{i+1/2}^{n+1, s+1} - \varepsilon_{i+1/2}^n}{\Delta t} = \alpha_{i+1/2}^{n+1, s} \left(I_{i+1/2}^{(0)n+1, s+1} - 2B_{i+1/2}^{n+1, s+1} \right),$$

воспользовавшись линеаризацией функции B и энергии ε :

$$B_{i+1/2}^{n+1, s+1} \approx B_{i+1/2}^{n+1, s} + \left. \frac{\partial B}{\partial T} \right|_{T=T_{i+1/2}^{n+1, s}} \left(T_{i+1/2}^{n+1, s+1} - T_{i+1/2}^{n+1, s} \right);$$

$$\varepsilon_{i+1/2}^{n+1, s+1} \approx \varepsilon_{i+1/2}^{n+1, s} + \left. \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \right|_{T=T_{i+1/2}^{n+1, s}} \left(T_{i+1/2}^{n+1, s+1} - T_{i+1/2}^{n+1, s} \right).$$

В результате получим выражение для вычисления $T_{i+1/2}^{n+1, s+1}$:

$$T_{i+1/2}^{n+1, s+1} = T_{i+1/2}^{n+1, s} + P^s \left[\frac{\varepsilon_{i+1/2}^n - \varepsilon_{i+1/2}^{n+1, s}}{\Delta t} + \alpha_{i+1/2}^{n+1, s} \left(I_{i+1/2}^{(0)n+1, s+1} - 2B_{i+1/2}^{n+1, s} \right) \right],$$

$$P^s = \left(\frac{1}{\Delta t} \left. \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \right|_{T=T_{i+1/2}^{n+1, s}} + 2\alpha_{i+1/2}^{n+1, s} \left. \frac{\partial B}{\partial T} \right|_{T=T_{i+1/2}^{n+1, s}} \right)^{-1}.$$

Используя полученное выражение, получим выражение для функции $B_{i+1/2}^{n+1, s+1}$:

$$B_{i+1/2}^{n+1, s+1} \approx B_{i+1/2}^{n+1, s} + P^s \left. \frac{\partial B}{\partial T} \right|_{T=T_{i+1/2}^{n+1, s}} \left[\frac{\varepsilon_{i+1/2}^n - \varepsilon_{i+1/2}^{n+1, s}}{\Delta t} + \alpha_{i+1/2}^{n+1, s} \left(I_{i+1/2}^{(0)n+1, s+1} - 2B_{i+1/2}^{n+1, s} \right) \right].$$

С использованием уравнения энергии с предыдущей, s -й, итерации запишем выражение для $B_{i+1/2}^{n+1, s+1}$ в поправочной форме относительно функции плотности излучения:

$$B_{i+1/2}^{n+1, s+1} \approx B_{i+1/2}^{n+1, s} + P^s \left. \frac{\partial B}{\partial T} \right|_{T=T_{i+1/2}^{n+1, s}} \left[\alpha_{i+1/2}^{n+1, s} \Delta I_{i+1/2}^{(0)n+1, s+1} + \alpha_{i+1/2}^{n+1, s} \left(I_{i+1/2}^{(0)n+1, s+1/2} - I_{i+1/2}^{(0)n+1, s} \right) \right],$$

где $\Delta I_{i+1/2}^{(0)n+1, s+1} = \sum_j \Delta I_{i+1/2, j+1/2}^{n+1, s+1} \Delta \mu_{j+1/2}$.

Воспользуемся приближением

$$\Delta I_{i+1/2}^{(0)n+1, s+1} \approx 2\Delta I_{i+1/2, j+1/2}^{n+1, s+1}$$

и получим окончательный вид поправочного уравнения:

$$\frac{1}{c} \frac{\Delta I_{i+1/2, j+1/2}^{n+1, s+1}}{\Delta t} + \mu_{j+1/2} \frac{\Delta I_{i+1/2, j+1/2}^{n+1, s+1} - \Delta I_{i, j+1/2}^{n+1, s+1}}{\Delta x} + \alpha_{i+1/2}^{n+1, s} \Delta I_{i+1/2, j+1/2}^{n+1, s+1} \left(1 - 2\alpha_{i+1/2}^{n+1, s} P^s \left. \frac{\partial B}{\partial T} \right|_{T=T_{i+1/2}^{n+1, s}} \right) =$$

$$= P^s \left(\alpha_{i+1/2}^{n+1, s} \right)^2 \left(I_{i+1/2}^{(0)n+1, s+1/2} - I_{i+1/2}^{(0)n+1, s} \right) \left. \frac{\partial B}{\partial T} \right|_{T=T_{i+1/2}^{n+1, s}}. \quad (8)$$

После решения уравнения простой итерации (6) и поправочного уравнения (8) получим решение на $(s+1)$ -й итерации

$$I_{i+1/2}^{(0)n+1, s+1} = \max \left(0; I_{i+1/2}^{(0)n+1, s+1/2} + \Delta I_{i+1/2}^{(0)n+1, s+1} \right).$$

Расчет температуры $T_{i+1/2}^{n+1, s+1}$ производится итерационно с использованием линеаризованного уравнения энергии:

$$T_{i+1/2}^{n+1, s+1, \nu+1} = T_{i+1/2}^{n+1, s+1, \nu} + P^{s+1, \nu} \left[\frac{\varepsilon_{i+1/2}^n - \varepsilon_{i+1/2}^{n+1} (T_{i+1/2}^{n+1, s+1, \nu})}{\Delta t} + \alpha_{i+1/2}^{n+1, s} (I_{i+1/2}^{(0)n+1, s+1} - 2B_{i+1/2}^{n+1, s+1, \nu}) \right],$$

$$P^{s+1, \nu} = \left(\frac{1}{\Delta t} \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \Big|_{T=T_{i+1/2}^{n+1, s+1, \nu}} + 2\alpha_{i+1/2}^{n+1, s} \frac{\partial B}{\partial T} \Big|_{T=T_{i+1/2}^{n+1, s+1, \nu}} \right)^{-1},$$

где ν — номер итерации.

Постановка расчетов модельных задач

Рассмотрим плоский слой $0 \leq x \leq 2$ из оптически плотного вещества (коэффициент поглощения $\alpha = \min(10^3/T^3; 10^6)$; уравнение состояния $\varepsilon(T) = 0,81T$). На левой границе слоя задан поток излучения, на правой границе — нулевой входящий поток.

Рассмотрим два варианта задания входящего потока по переменной μ на границе $x = 0$:

$$1) I(0, \mu)|_{\mu > 0} = B(T = \sqrt{0,5}) \equiv \frac{\sigma}{4}; \quad 2) I(0, \mu)|_{\mu > 0} = \begin{cases} B(T = 1) \equiv \sigma, & 0 < \mu \leq 0,5; \\ 0, & \mu > 0,5. \end{cases}$$

Начальная температура $T_0(x) = 10^{-7}$; начальное распределение излучения $I_0(x, \mu) = B(T_0(x))$.

Входящий поток для варианта 1 является изотропным, для варианта 2 — анизотропным. При этом отметим, что оба варианта по интегральной величине входящего потока идентичны и, учитывая физическую постановку задачи, должны иметь близкие решения.

Расчеты проводились с постоянным временным шагом, равным 10^{-5} , до момента времени $t = 1$. Относительная точность сведения итераций по температуре задавалась равной $\varepsilon_T = 10^{-10}$, относительная точность сведения итераций по плотности потока излучения — $\varepsilon_I = 10^{-8}$.

Для аппроксимации уравнения по угловой переменной μ задавалась равномерная сетка с числом интервалов 20.

Результаты расчетов модельных задач по DD-схеме

На рис. 1 приведены профили температуры вещества на момент окончания расчетов, проведенных с использованием DD-схемы на сгущающихся равномерных пространственных сетках. Из рисунка видно:

1. В расчетах с изотропным потоком решение очень слабо зависит от пространственной сетки.
2. В расчетах с анизотропным потоком присутствует существенная зависимость решения от пространственной сетки. При этом только на самой подробной сетке результаты расчетов согласуются с физикой процесса прогрева излучением заданного вещества, а на более грубых сетках прогрев вещества не соответствует физической постановке задачи.

На рис. 2 приведено схематичное распространение излучения от левой границы системы для двух направлений полета фотонов (значений μ), соответствующих ненулевому и нулевому входящим потокам. С помощью этого рисунка поясним, чем вызван обнаруженный счетный эффект нефизического прогрева вещества анизотропным потоком излучения:

1. При ненулевом входящем потоке (см. рис. 2, а) в соответствии с постановкой задачи прогрев первой счетной ячейки осуществляется входящим потоком излучения I_{IN}^a . При этом согласно физике процесса прогрев происходит постепенно и до определенного момента времени излучение из ячейки не выходит. В этом случае из дополнительного соотношения DD-схемы следует

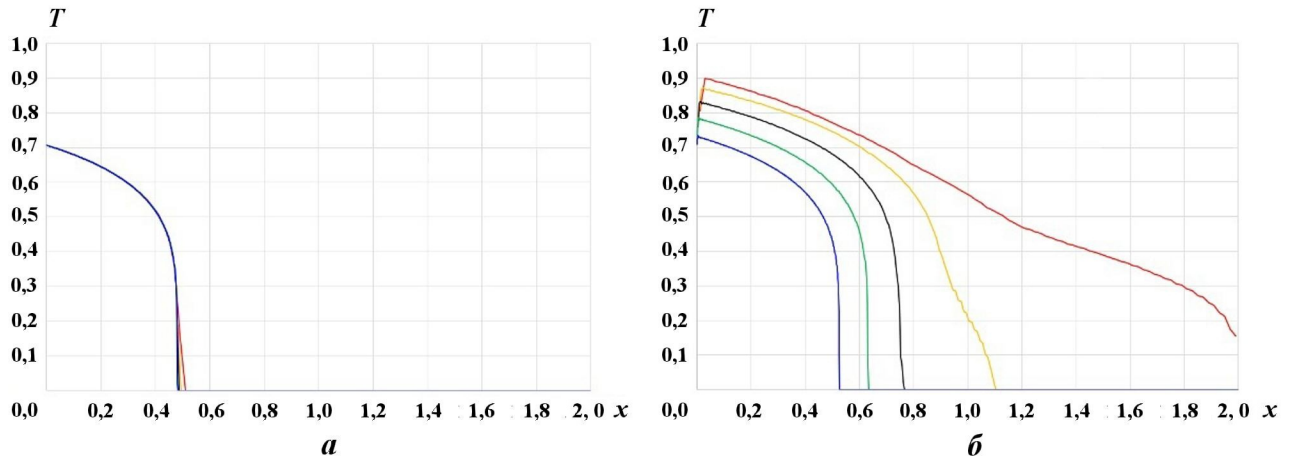


Рис. 1. Профиль температуры вещества на момент окончания расчетов по DD-схеме: *a* — с изотропным входящим потоком; *б* — с анизотропным входящим потоком; — — $h = 0,02$; — — $h = 0,01$; — — $h = 0,005$; — — $h = 0,0125$

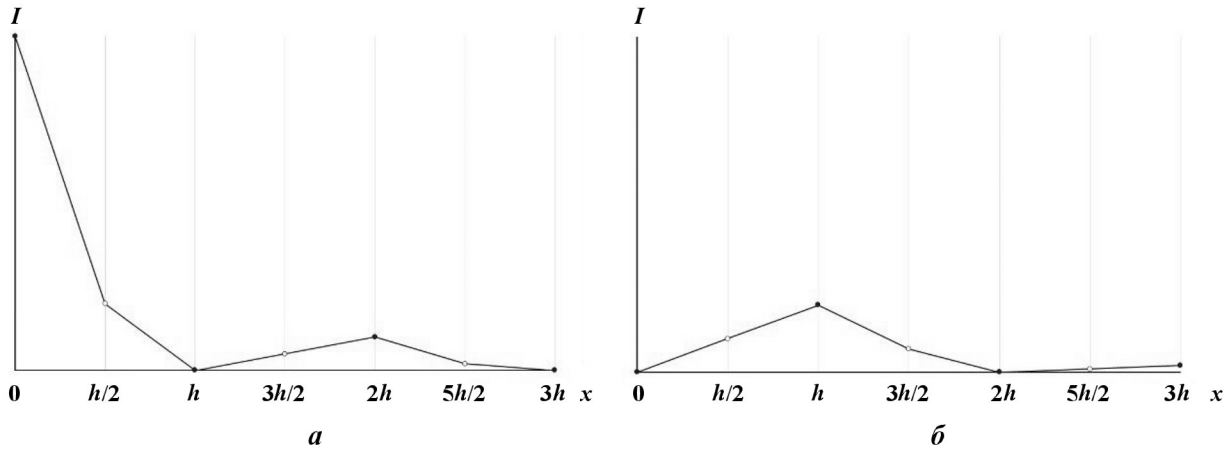


Рис. 2. Схематичное распространение излучения от левой границы системы для двух направлений полета частиц в расчете с анизотропным входящим потоком по DD-схеме: *a* — ненулевой входящий поток; *б* — нулевой входящий поток

$I_h^a = 2I_{h/2}^a - I_{IN}^a < 0$, т. е. схема как бы "знает", что излучение находится у левой границы, и не выпускает его (происходит коррекция отрицательного решения методом балансного зануления^{*}).

2. Для направления полета частиц с нулевым входящим потоком (см. рис. 2, *б*) ситуация является обратной: будучи уже немного прогретой входящим потоком I_{IN}^a первая ячейка начинает выпускать излучение, так как из дополнительного соотношения DD-схемы $I_h^b = 2I_{h/2}^b > 0$. В этом случае схема как бы "предполагает", что излучение находится у правой границы ячейки, и оно выпускается.
3. Во второй счетной ячейке имеет место противоположная ситуация, т. е. для направления, в котором задан ненулевой входящий поток, вторая ячейка начинает выпускать из себя излучение, а для направления с нулевым входящим потоком излучение запирается в ней.

^{*} Вместо балансного зануления можно использовать другие методы коррекции решения, например пересчет по St-схеме. Однако использование в расчетах DD/St-схемы никак не влияет на счетный эффект.

Таким образом, волнообразный характер распространения излучения по веществу, при котором пространственное распределение интенсивности излучения для разных направлений полета частиц находится в противофазе, является основной причиной образования счетного эффекта нефизического прогрева вещества анизотропным потоком излучения. Заметим, что при изотропном входящем потоке в численном решении для разных направлений полета частиц противофаз не возникает и результаты расчетов являются корректными даже на относительно грубых пространственных сетках.

Как показано на рис. 1, б, с измельчением пространственной сетки счетный эффект уменьшается и наблюдается сходимость численного решения к физически корректному результату.

Модификации расчетной схемы

С физической точки зрения в рассмотренной задаче анизотропный входящий поток излучения должен в достаточно узкой приграничной области трансформироваться в изотропный. Поэтому для преодоления обнаруженного счетного эффекта было рассмотрено три модификации расчетной схемы, направленные на *изотропизацию* потока излучения, выходящего из первой приграничной ячейки при $\mu > 0$. В качестве таких модификаций использовались следующие схемы:

1. **DDc_ST** — ST-схема первого порядка точности.
2. **DDc_I** — схема, в которой для замыкания системы сеточных уравнений совместно с уравнением баланса (3) использовалось дополнительное соотношение

$$I_{i+1,j+1/2}^{n+1,s+1/2} = I_{i,j+1/2}^{n+1,s+1/2} e^{-\tilde{L}} + \frac{\tilde{F}_{i+1/2}^{n+1,s}}{\tilde{\alpha}_{i+1/2}^{n+1,s}} (1 - e^{-\tilde{L}}).$$

Здесь $\tilde{L} = \tilde{\alpha}_{i+1/2}^{n+1,s} \frac{\Delta x}{|\mu|}$; $\tilde{\alpha}_{i+1/2}^{n+1,s} = \alpha_{i+1/2}^{n+1,s} + \frac{1}{c\Delta t}$; $\tilde{F}_{i+1/2}^{n+1,s} = F_{i+1/2}^{n+1,s} + \frac{I_{i+1/2,j+1/2}^n}{c\Delta t}$; $F_{i+1/2}^{n+1,s}$ — правая часть в уравнении баланса (в случае уравнения (1) без учета рассеяния и внешних источников

$$F_{i+1/2}^{n+1,s} \equiv \alpha_{i+1/2}^{n+1,s} B_{i+1/2}^{n+1,s}).$$

Эта схема получается в предельном случае при разбиении ячейки на бесконечное число подъячеек, рассчитываемых по DD-схеме, и эквивалентна SC-схеме [8] для стационарного уравнения. Схема обеспечивает положительность решения и обладает первым порядком точности.

3. **DDc_SC** — схема, в которой для замыкания системы сеточных уравнений совместно с уравнением баланса (3) использовалось дополнительное соотношение (на основе SC-схемы)

$$I_{i+1,j+1/2}^{n+1,s+1/2} = I_{i+1/2,j+1/2}^{n+1,s+1/2} e^{-L} + \frac{F_{i+1/2}^{n+1,s}}{\alpha_{i+1/2}^{n+1,s}} (1 - e^{-L}),$$

$$\text{где } L = \alpha_{i+1/2}^{n+1,s} \frac{\Delta x}{2|\mu|}.$$

Несложно показать, что эта схема также обеспечивает положительность решения.

Особо отметим, что модифицированные схемы используются только в первой приграничной ячейке при $\mu > 0$, а во всех остальных случаях применяется DD-схема.

На рис. 3 приведены профили температуры вещества на момент окончания расчетов по модифицированным схемам. Из рисунка видно:

1. Переход на DDc_ST-схему позволил, хоть и не полностью, но в значительной мере уменьшить счетный эффект нефизического прогрева вещества анизотропным потоком излучения. Заметим, что на рис. 3, б "выброс" температуры вещества при $x > 0,45$ в расчетах на грубых пространственных сетках также вызван противофазами в решении для разных направлений полета частиц, начало которых сформировалось внутри вещества, а не у его границы.

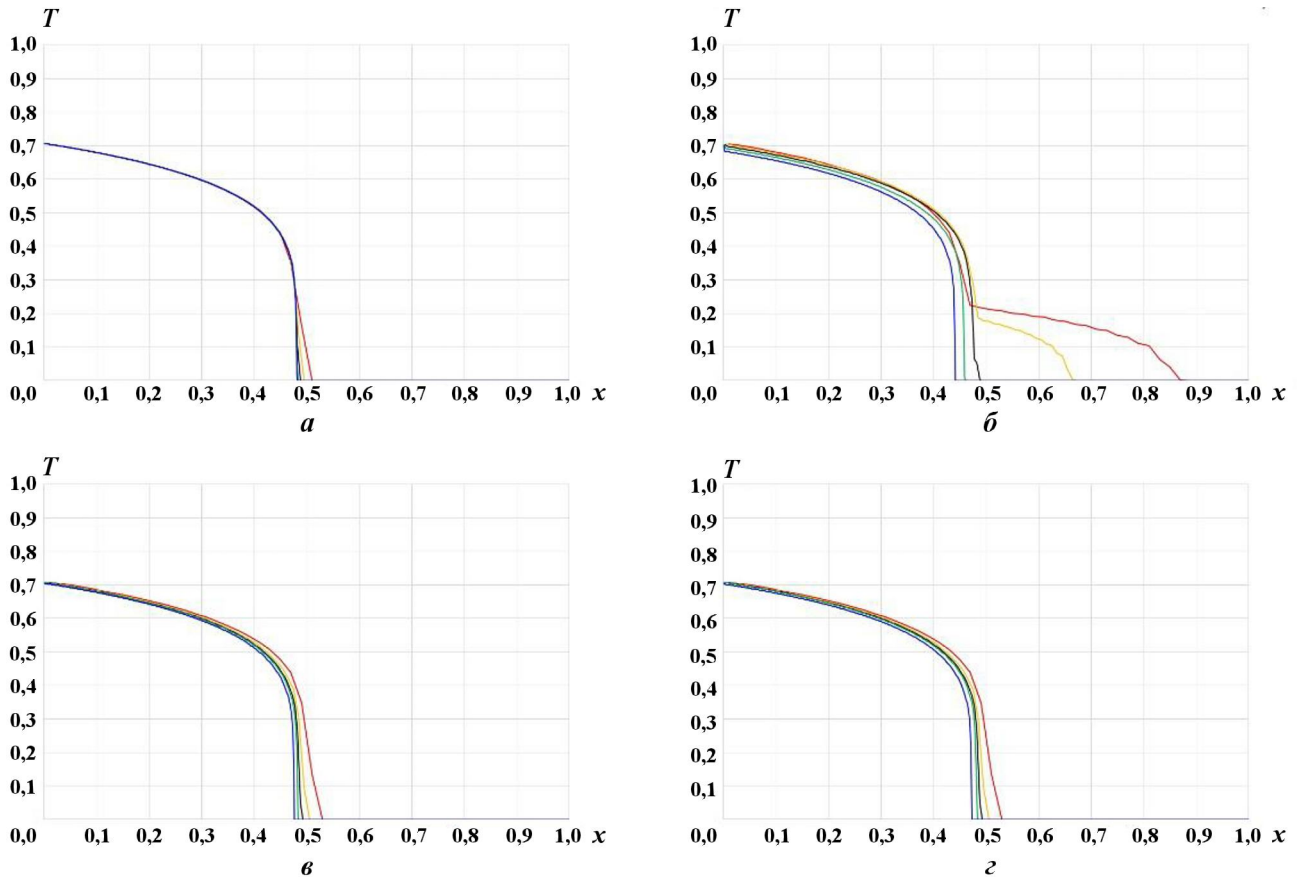


Рис. 3. Профили температуры вещества на момент окончания расчетов: *a* — с изотропным входящим потоком по DD-схеме; *б–г* — с анизотропным входящим потоком по схемам DDc_ST, DDc_I и DDc_SC соответственно; — $h = 0,02$; — $h = 0,01$; — $h = 0,005$; — $h = 0,0025$; — $h = 0,0125$

2. При использовании DDc_I- и DDc_SC-схем никаких счетных артефактов в решении нет и результаты расчетов на всей совокупности рассмотренных пространственных сеток очень близки как между собой, так и к физически корректному результату.

В рассмотренных расчетах на равномерных пространственных сетках минимальный размер ячейки составлял 0,00125, и результаты расчетов на сетке с такими ячейками с изотропным и анизотропным входящими потоками оказались близки (см. рис. 3). Однако при дальнейшем измельчении сетки результаты расчетов по DD-схеме с анизотропным потоком сходятся к несколько другому решению. Для иллюстрации этого факта на рис. 4 показаны результаты расчетов задач с изотропным и анизотропным потоками на подробной неравномерной сетке с начальным шагом $h_0 = 10^{-8}$ и знаменателем $q = 1,01$ ($h_{i+1/2} = q^i h_0$).

Заключение

В работе описан обнаруженный счетный эффект нефизичного прогрева вещества анизотропным потоком излучения в расчетах по DD-схеме. Установлены причины возникновения этого эффекта, а также предложены три модификации расчетной схемы, которые позволяют в значительной мере повысить точность расчетов. При этом модификации DDc_I и DDc_SC для всей совокупности рассмотренных пространственных сеток позволяют практически полностью избавиться от артефактов в численном решении, результаты расчетов по этим схемам очень близки между собой и к физически обоснованным результатам.

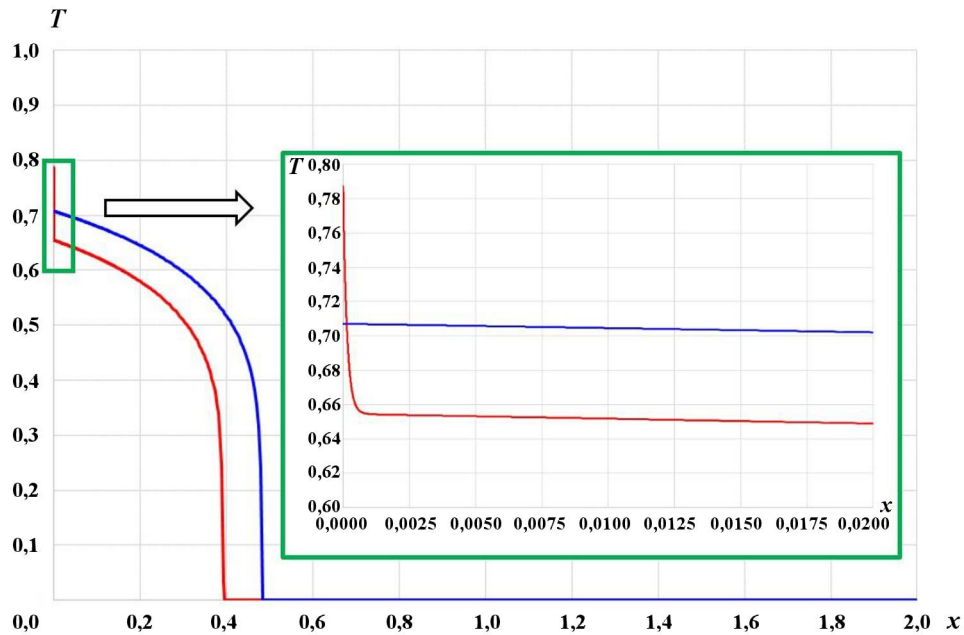


Рис. 4. Профиль температуры вещества на момент окончания расчетов по DD-схеме на неравномерной сетке с начальным шагом $h_0 = 10^{-8}$ и знаменателем $q = 1,01$ с изотропным (—) и анизотропным (—) входящими потоками

Список литературы

1. Шестаков А. А. Сеточные эффекты при численном моделировании переноса теплового излучения // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2018. Вып. 4. С. 29–45.
Shestakov A. A. Setochnye efekty pri chislenном modelirovanii perenosa teplovogo izlucheniya // Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov. 2018. Vyp. 4. S. 29–45.
2. Шестаков А. А. Численные эффекты при численном моделировании переноса теплового излучения // Там же. 2019. Вып. 1. С. 44–56.
Shestakov A. A. Chislennye efekty pri chislenном modelirovanii perenosa teplovogo izlucheniya // Tam zhe. 2019. Vyp. 1. S. 44–56.
3. Карлсон Б. Численное решение задач кинетической теории нейтронов // Теория ядерных реакторов. М.: Атомиздат, 1963.
Karlson B. Chislennoe reshenie zadach kineticheskoy teorii neytronov // Teoriya yadernykh reaktorov. M.: Atomizdat, 1963.
4. Басс А. П., Волощенко А. М., Гермогенова Т. А. Методы дискретных ординат в задачах о переносе излучений. М.: ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР, 1986.
Bass A. P., Voloshchenko A. M., Germogenova T. A. Metody diskretnykh ordinat v zadachakh o perenose izlucheniya. M.: IPM im. M. V. Keldysha AN SSSR, 1986.
5. Елесин В. А., Трощиёв В. Е., Федянин В. И., Юдинцев В. Ф. Численная методика и организация программы для решения многогруппового нестационарного кинетического уравнения // Комплексы программ математической физики. Новосибирск, 1972.
Elesin V. A., Troshchiyev V. E., Fedyanin V. I., Yudin'tsev V. F. Chislennaya metodika i organizatsiya programmy dlya resheniya mnogogruppovogo nestatsionarnogo kineticheskogo uravneniya // Kompleksy program matematicheskoy fiziki. Novosibirsk, 1972.

6. *Карлсон Б. Г., Латрон К. Д.* Теория переноса. Метод дискретных ординат // Вычислительные методы в физике реакторов. М.: Атомиздат, 1972.
Karlson B. G., Latrop K. D. Teoriya perenosa. Metod diskretnykh ordinat // Vychislitelnye metody v fizike reaktorov. M.: Atomizdat, 1972.
7. *Морозов В. Н.* О решении кинетических уравнений с помощью S_n -метода // Теория и методы расчета ядерных реакторов. М.: Госатомиздат, 1962.
Morozov V. N. O reshenii kineticheskikh uravneniy s pomoshchyu S_n -metoda // Teoriya i metody rascheta yadernykh reaktorov. M.: Gosatomizdat, 1962.
8. *Lathrop K. D.* Spatial Differencing of the Transport Equation: Positivity vs Accuracy // J. Comp. Phys. 1969. Vol. 4. P. 475—498.

Статья поступила в редакцию 07.06.21.
